Ε Θ Ν Ι Κ Ο Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

Σ Χ Ο Λ Η Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Ω Ν
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν Κ Α Ι Φ Υ Σ Ι Κ Ω Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ω Ν

Τ Ο Μ Ε Α Σ Φ Υ Σ Ι Κ Η Σ

Κανονική εξέταση στο μάθημα ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
29 Ιουνίου 2012   Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες   Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Θέμα 1. Ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S. Οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$.

(α) Στο σύστημα S, δύο συμβάντα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = 600\ \mathrm{m}$ και χρονικά κατά διάστημα $\Delta t = 1,2\ \mu\mathrm{s}$. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα ενός άλλου συστήματος, S΄, ως προς το S, για να είναι σε αυτό ταυτόχρονα τα δύο συμβάντα; Ποια είναι η απόσταση των δύο συμβάντων στο S';

(β) Δείξετε πως, αν στο σύστημα S είναι $x = ct$ (φωτεινό κύμα), τότε και στο σύστημα S΄ θα είναι $x' = ct'$.

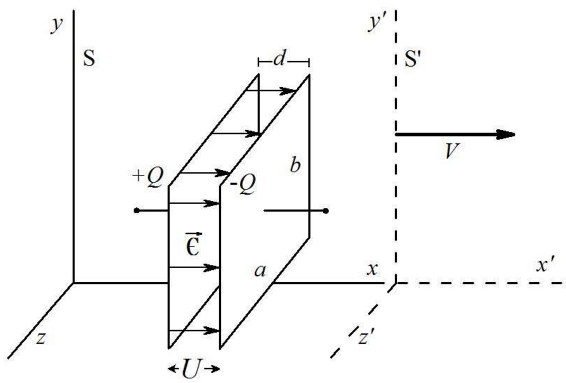
(γ) Δείξετε, ότι το μέγεθος $s^2 = c^2t^2 - x^2$ είναι αναλλοίωτο κατά τον μετασχηματισμό του Λόρεντς.

Θέμα 2. (α) Με ποια σταθερή ταχύτητα πρέπει να κινείται ένα διαστημόπλοιο, ως προς τη Γη, για να διασχίσει τον γαλαξία μας σε 40 χρόνια, όπως αυτός ο χρόνος θα μετρηθεί μέσα στο διαστημόπλοιο; Στο σύστημα αναφοράς της Γης, η διάμετρος του Γαλαξία είναι 10^5 έτη φωτός. Πόση θα είναι η διάμετρος του Γαλαξία για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο;

(β) Μια πηγή φωτός κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα 0,5*c*. Ποια είναι η μετατόπιση στο μήκος κύματος, λόγω του φαινομένου Ντόπλερ, στην κίτρινη φασματική γραμμή του νατρίου, όπως αυτή παρατηρείται από έναν παρατηρητή στο κέντρο του κύκλου; Η γραμμή αυτή έχει μήκος κύματος 589 nm στο εργαστήριο.

Θέμα 3. Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή ποζιτρονίου (e^+) κατά τη σύγκρουση ενός φωτονίου (γ) με ακίνητο ηλεκτρόνιο (e^-), στην αντίδραση $\gamma + e^- \to e^- + e^- + e^+$; (Δίνεται, για τα e^- και e^+: $m_e c^2 = 0,511\ \mathrm{MeV}$).

Θέμα 4. Πυκνωτής με παράλληλους επίπεδους οπλισμούς βρίσκεται ακίνητος στο σύστημα αναφοράς S. Οι οπλισμοί του πυκνωτή είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές *a* και *b* και είναι προσανατολισμένοι έτσι ώστε να είναι παράλληλοι προς το επίπεδο *yz* και με απόσταση *d* μεταξύ τους (βλ. σχήμα). Στους οπλισμούς του πυκνωτή υπάρχουν φορτία $\pm Q$, τα οποία δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\hat{\mathbf{x}}$ στον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς. Η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση $C = \varepsilon_0 ab / d$ και η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $U = Q / C$. Είναι, επίσης, $\mathcal{E} = U / d$.



Ένα άλλο σύστημα αναφοράς, το S΄, κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S. Οι άξονες των δύο συστημάτων είναι παράλληλοι και συνέπιπταν τη στιγμή $t = t' = 0$.

(α) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον μετασχηματισμό των πεδίων, να βρείτε, συναρτήσει των C, $\vec{\mathcal{E}}$ U και της ταχύτητας *V* (δηλαδή του *γ*), τη χωρητικότητα του πυκνωτή C', την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή $\vec{\mathcal{E}}'$ και τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς U' , όπως τα μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα S΄.

$\Rightarrow\ \Rightarrow\ \Rightarrow$

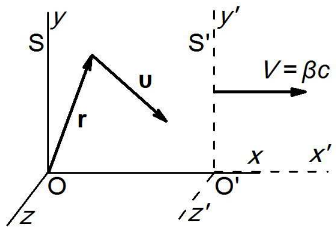
(β) Χρησιμοποιήστε τώρα τον μετασχηματισμό των πεδίων, για να βρείτε πάλι, στο σύστημα S΄, το ηλεκτρικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο στον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή.

(γ) Θεωρήστε τώρα ότι ο πυκνωτής περιστρέφεται περί άξονα παράλληλο προς τον άξονα των z, ώστε οι οπλισμοί του να είναι παράλληλοι με το επίπεδο xz και το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσά τους να είναι $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{y}}$. Υπολογίστε, στο σύστημα S΄, τα ίδια μεγέθη που ζητήθηκαν στο ερώτημα (α).

Τυπολόγιο

Σχετικιστική Κινηματική:

<u>Μετασχηματισμός της θέσης</u>: Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S, και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$, τότε:



$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

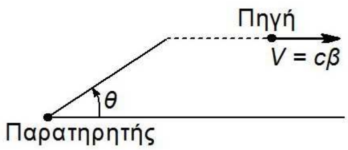
$$\text{όπου} \quad \beta \equiv \frac{V}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Συστολή του μήκους: $\Delta l = \Delta l_0 / \gamma$ (Δl_0 = μήκος ηρεμίας, δηλ. για ράβδο ακίνητη)

Διαστολή του χρόνου: $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$ (Δt_0 = ιδιοχρόνος, δηλ. για ρολόι ακίνητο)

<u>Μετασχηματισμός της ταχύτητας</u>: $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}, \qquad \upsilon'_y = \dfrac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_z = \dfrac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}.$

<u>Φαινόμενο Doppler</u>: $\lambda = \lambda_0 \dfrac{1 + \beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$



Σχετικιστική Δυναμική:

$m_0 = m(0) \qquad m = m(\upsilon) = \gamma m_0 \qquad$ όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, υ = ταχύτητα του σωματιδίου

$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}} = \gamma m_0 \vec{\mathbf{v}} \qquad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \qquad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

Για φωτόνια: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} \qquad E = pc$

<u>Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας</u>: $p'_x = \gamma\left(p_x - VE/c^2\right) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z \qquad E' = \gamma\left(E - Vp_x\right)$

<u>Ισοδυναμία μάζας-ενέργειας</u>: $\Delta E = \Delta m\, c^2$

Ηλεκτρομαγνητισμός:

<u>Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου</u>:

$$\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x \qquad \mathcal{E}'_y = \gamma\left(\mathcal{E}_y - VB_z\right) \qquad \mathcal{E}'_z = \gamma\left(\mathcal{E}_z + VB_y\right)$$

$$B'_x = B_x \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + V\mathcal{E}_z / c^2\right) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - V\mathcal{E}_y / c^2\right)$$

(Χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο $\mathcal{E}$ για το ηλεκτρικό πεδίο για να μην το μπερδέψουμε με το E της ολικής ενέργειας.)

Προσεγγίσεις: Για μικρά x, $\quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} \qquad \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \dfrac{x}{2}\,.$

Θέμα 1. Ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S. Οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$.

(α) Στο σύστημα S, δύο συμβάντα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = 600\ \text{m}$ και χρονικά κατά διάστημα $\Delta t = 1,2\ \mu\text{s}$. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα ενός άλλου συστήματος, S΄, ως προς το S, για να είναι σε αυτό ταυτόχρονα τα δύο συμβάντα; Ποια είναι η απόσταση των δύο συμβάντων στο S';

(β) Δείξετε πως, αν στο σύστημα S είναι $x = ct$ (φωτεινό κύμα), τότε και στο σύστημα S΄ θα είναι $x' = ct'$.

(γ) Δείξετε, ότι το μέγεθος $s^2 = c^2t^2 - x^2$ είναι αναλλοίωτο κατά τον μετασχηματισμό του Λόρεντς.

ΛΥΣΗ

(α) Τα δύο συμβάντα, 1 και 2, παρατηρούνται στο σύστημα S΄ να συμβαίνουν στις χρονικές στιγμές

$$t_1' = \frac{t_1 - (\beta / c)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{και} \qquad t_2' = \frac{t_2 - (\beta / c)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Αφαιρώντας,
$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\left(t_2 - t_1\right) - (\beta / c)\left(x_2 - x_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Αντικαθιστώντας $t_2' - t_1' = 0$, $t_2 - t_1 = 1,2\times 10^{-6}\ \text{s}$ και $\left(x_2 - x_1\right)/c = 600\ \text{m} / 3\times 10^8\ \text{m/s} = 2\times 10^{-6}\ \text{s}$, έχουμε

$$\beta = \frac{\left(t_2' - t_1'\right)c}{x_2 - x_1} = \frac{1,2\times 10^{-6}}{2\times 10^{-6}} = 0,6 = \frac{3}{5} .$$

Η απόσταση των δύο συμβάντων στο S' είναι

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{\left(x_2 - x_1\right) - \beta c\left(t_2 - t_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{4}\left[600 - \frac{3}{5}\times(3\times 10^8)\times(1,2\times 10^{-6})\right] = 270\ \text{m} .$$

(β) Από τον μετασχηματισμό του Λόρεντς,

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ct - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = ct\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = ct\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

και
$$t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t - (V/c^2)ct}{\sqrt{1-\beta^2}} = t\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = t\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} .$$

Επομένως, $x' = ct'$.

(γ) Με αντικατάσταση, βρίσκουμε

$$s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 = c^2\gamma^2\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)^2 - \gamma^2\left(x - \beta ct\right)^2 =$$
$$= \gamma^2\left(c^2t^2 - \cancel{2\beta cxt} + \beta^2x^2 - x^2 + \cancel{2\beta cxt} - \beta^2c^2t^2\right) =$$
$$= \gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left(c^2t^2 - x^2\right) = \left(c^2t^2 - x^2\right) = s^2$$

Θέμα 2. (α) Με ποια σταθερή ταχύτητα πρέπει να κινείται ένα διαστημόπλοιο, ως προς τη Γη, για να διασχίσει τον γαλαξία μας σε 40 χρόνια, όπως αυτός ο χρόνος θα μετρηθεί μέσα στο διαστημόπλοιο; Στο σύστημα αναφοράς της Γης, η διάμετρος του Γαλαξία είναι 10^5 έτη φωτός. Πόση θα είναι η διάμετρος του Γαλαξία για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο;

(β) Μια πηγή φωτός κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα 0,5*c*. Ποια είναι η μετατόπιση στο μήκος κύματος, λόγω του φαινομένου Ντόπλερ, στην κίτρινη φασματική γραμμή του νατρίου, όπως αυτή παρατηρείται από έναν παρατηρητή στο κέντρο του κύκλου; Η γραμμή αυτή έχει μήκος κύματος 589 nm στο εργαστήριο.

ΛΥΣΗ

(α) Αν *D* είναι η διάμετρος του Γαλαξία, τότε, σύμφωνα με έναν παρατηρητή στη Γη, ο χρόνος που θα απαιτηθεί για να διασχίσει τον Γαλαξία το διαστημόπλοιο θα είναι: $\Delta t = D/V$.

Ο χρόνος αυτός για το διαστημόπλοιο θα είναι $\Delta t' = \Delta t/\gamma$, όπου γ είναι ο παράγοντας του Λόρεντς που αντιστοιχεί στην ταχύτητα του διαστημοπλοίου. Επομένως,

$$\gamma = \frac{D}{V\Delta t'} \quad \Rightarrow \quad \beta\gamma = \frac{D/c}{\Delta t'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \left(\frac{D/c}{\Delta t'}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{\left(\frac{D/c}{\Delta t'}\right)^2}{1+\left(\frac{D/c}{\Delta t'}\right)^2}}$$

Όμως, $\dfrac{D/c}{\Delta t'} = \dfrac{100\,000}{40} = 2500$ και επομένως είναι

$$\beta = \sqrt{\frac{2500^2}{1+2500^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\times 2500^2} = 1 - 8\times 10^{-8}.$$

Η διάμετρος του Γαλαξία για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο θα είναι:

$$D' = \frac{D}{\gamma} = V\Delta t' = \frac{V}{c}(c\Delta t') = \beta(c\Delta t') \approx 1\times(c\Delta t') \approx 40 \text{ έτη φωτός}.$$

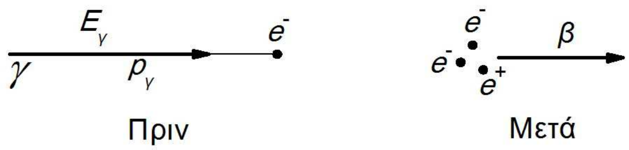
(β) Είναι $\beta = 0{,}5$ και επομένως $\gamma = 2/\sqrt{3} = 1{,}1547$. Η μεταβολή στο μήκος κύματος οφείλεται αποκλειστικά στο εγκάρσιο φαινόμενο Ντόπλερ και επομένως, από τη σχέση $\lambda = \lambda_0\gamma\left(1+\beta\cos\theta\right)$ με $\theta = 90^{\circ}$, είναι $\lambda = \lambda_0\gamma$, όπου $\lambda_0 = 589$ nm είναι το μήκος κύματος στο σύστημα αναφοράς της πηγής και λ το μήκος κύματος στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Η μετατόπιση της φασματικής γραμμής θα είναι:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_0(\gamma - 1) = 589\times\left(1{,}1547 - 1\right) = 91 \text{ nm}.$$

Θέμα 3. Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή ποζιτρονίου (e^+) κατά τη σύγκρουση ενός φωτονίου (γ) με ακίνητο ηλεκτρόνιο (e^-), στην αντίδραση $\gamma + e^- \to e^- + e^- + e^+$; (Δίνεται, για τα e^- και e^+: $m_e c^2 = 0,511\ \text{MeV}$).

ΛΥΣΗ

Για διαθέσιμη ενέργεια ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα σωματίδια που παράγονται θα είναι ακίνητα στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, επομένως, όλα τα παραγόμενα σωματίδια θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, έστω βc, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Από τις αρχές διατήρησης, έχουμε,

ενέργεια: $$E_\gamma + m_e c^2 = 3 m_e c^2 \gamma \qquad (1)$$

ορμή: $$\frac{E_\gamma}{c} = 3 m_e c \gamma \beta \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας για την E_γ από την Εξ. (2) στην (1), έχουμε

$$3 m_e c^2 \beta\gamma + m_e c^2 = 3 m_e c^2 \gamma$$

από την οποία προκύπτει ότι

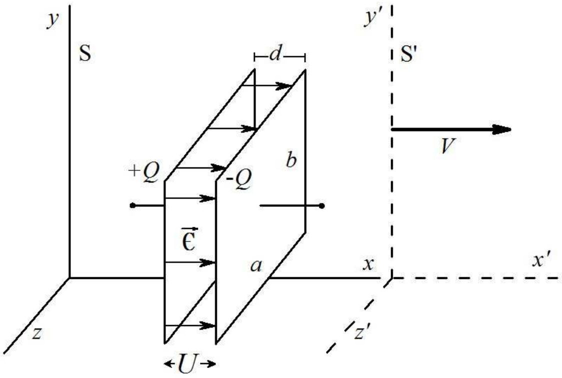
$$3\beta\gamma + 1 = 3\gamma, \qquad 3(1-\beta)\gamma = 1, \qquad \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{3}, \qquad 9(1-\beta) = 1+\beta .$$

Επομένως, $$\beta = \frac{4}{5} \qquad \text{και} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{3}.$$

Η Εξ. (2) δίνει $$E_\gamma = 3 m_e c^2 \beta\gamma = 3 m_e c^2 \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} \qquad \text{ή} \qquad E_\gamma = 4 m_e c^2 .$$

Αντικαθιστώντας $m_e c^2 = 0,511\ \text{MeV}$ στην $E_\gamma = 4 m_e c^2$ βρίσκουμε για την ενέργεια κατωφλίου του φωτονίου την τιμή $$E_\gamma = 2,044\ \text{MeV}.$$

Θέμα 4. Πυκνωτής με παράλληλους επίπεδους οπλισμούς βρίσκεται ακίνητος στο σύστημα αναφοράς S. Οι οπλισμοί του πυκνωτή είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές a και b και είναι προσανατολισμένοι έτσι ώστε να είναι παράλληλοι προς το επίπεδο yz και με απόσταση d μεταξύ τους (βλ. σχήμα). Στους οπλισμούς του πυκνωτή υπάρχουν φορτία $\pm Q$, τα οποία δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\hat{\mathbf{x}}$ στον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς. Η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση $C = \varepsilon_0 ab / d$ και η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $U = Q / C$. Είναι, επίσης, $\mathcal{E} = U / d$.



Ένα άλλο σύστημα αναφοράς, το S΄, κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S. Οι άξονες των δύο συστημάτων είναι παράλληλοι και συνέπιπταν τη στιγμή $t = t' = 0$.

(α) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον μετασχηματισμό των πεδίων, να βρείτε, συναρτήσει των C , $\vec{\mathcal{E}}$ U και της ταχύτητας V (δηλαδή του γ), τη χωρητικότητα του πυκνωτή C' , την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή $\vec{\mathcal{E}}'$ και τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς U' , όπως τα μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα S΄.

(β) Χρησιμοποιήστε τώρα τον μετασχηματισμό των πεδίων, για να βρείτε πάλι, στο σύστημα S΄, το ηλεκτρικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο στον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή.

(γ) Θεωρήστε τώρα ότι ο πυκνωτής περιστρέφεται περί άξονα παράλληλο προς τον άξονα των z, ώστε οι οπλισμοί του να είναι παράλληλοι με το επίπεδο xz και το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσά τους να είναι $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\hat{\mathbf{y}}$. Υπολογίστε, στο σύστημα S΄, τα ίδια μεγέθη που ζητήθηκαν στο ερώτημα (α).

ΛΥΣΗ

(α) Στο σύστημα S΄, ο πυκνωτής κινείται με ταχύτητα V προς τα αρνητικά x. Το φορτίο είναι αναλλοίωτο και παραμένει $\pm Q$ στους οπλισμούς του πυκνωτή. Η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς θα είναι τώρα $d' = d / \gamma$ και η χωρητικότητα του πυκνωτή

$$C' = \varepsilon_0 \frac{a'b'}{d'} = \varepsilon_0 \frac{ab}{d/\gamma} = \varepsilon_0 \frac{ab}{d}\gamma = \gamma C \, .$$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι τώρα $U' = \dfrac{Q}{C'} = \dfrac{Q}{\gamma C} = \dfrac{U}{\gamma}$.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\vec{\mathcal{E}}' = \mathcal{E}'\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{U'}{d'}\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{U/\gamma}{d/\gamma}\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{U}{d}\hat{\mathbf{x}} = \mathcal{E}\hat{\mathbf{x}} = \vec{\mathcal{E}}$

(β) Ο μετασχηματισμός των πεδίων είναι

$$\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x \, , \quad \mathcal{E}'_y = \gamma\left(\mathcal{E}_y - VB_z\right), \quad \mathcal{E}'_z = \gamma\left(\mathcal{E}_z + VB_y\right), \quad B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma\left(B_y + V\mathcal{E}_z / c^2\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - V\mathcal{E}_y / c^2\right)$$

Στο σύστημα S, τα πεδία έχουν συνιστώσες $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_y = 0$, $\mathcal{E}_z = 0$, $B_x = 0$ $B_y = 0$, $B_z = 0$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x = \mathcal{E} \, , \quad \mathcal{E}'_y = \gamma\left(\mathcal{E}_y - VB_z\right) = 0 \, , \quad \mathcal{E}'_z = \gamma\left(\mathcal{E}_z + VB_y\right) = 0 \, ,$$

$$B'_x = B_x = 0 \quad B'_y = \gamma\left(B_y + V\mathcal{E}_z / c^2\right) = 0 \, , \quad B'_z = \gamma\left(B_z - V\mathcal{E}_y / c^2\right) = 0$$

Επομένως, $\vec{\mathcal{E}}' = \mathcal{E}\hat{\mathbf{x}}$ και $\mathbf{B} = 0$.

(γ) Το φορτίο είναι αναλλοίωτο και παραμένει $\pm Q$ στους οπλισμούς του πυκνωτή. Η διάσταση του πυκνωτή που αλλάζει τώρα είναι η $b' = b / \gamma$. Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$C' = \varepsilon_0 \frac{a'b'}{d'} = \varepsilon_0 \frac{ab/\gamma}{d} = \varepsilon_0 \frac{ab}{\gamma d} = \frac{C}{\gamma}\,.$$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $U' = \dfrac{Q}{C'} = \dfrac{Q}{C/\gamma} = \gamma U$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\vec{\mathcal{E}}' = \mathcal{E}'\hat{\mathbf{y}} = \dfrac{U'}{d'}\hat{\mathbf{y}} = \dfrac{\gamma U}{d}\hat{\mathbf{y}} = \gamma\mathcal{E}\hat{\mathbf{y}} = \gamma\vec{\mathcal{E}}$